

Monotonie und Grenzwerte

Spickzettel Aufgaben Lösungen **PLUS**

Monotonie

Wenn eine Folge monoton ist, so ist sie entweder **monoton steigend** oder **monoton fallend**.

- Eine Folge ist dann monoton steigend, wenn jedes Folgenglied größer oder gleich seinem Vorgänger ist, wenn also gilt:

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ bzw. } a_{n+1} \geq a_n$$

- Wenn eine Folge monoton fallend ist, so ist jedes Folgenglied kleiner oder gleich seinem Vorgänger, es gilt:

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \\ \text{bzw. } a_{n+1} \leq a_n$$

Ist eine Folge nicht monoton und ihre Glieder sind abwechselnd positiv und negativ, so ist die Folge **alternierend**.

Beschränktheit

Eine Folge kann nach oben, nach unten oder nach oben und unten beschränkt sein.

- Ist eine Folge **nach oben beschränkt**, so gibt es eine Zahl, die größer als jedes Glied der Folge ist, die also nie überschritten wird.
- Eine Folge ist **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl gibt, die kleiner als jedes Folgenglied ist, die also nie unterschritten wird.

Grenzwerte

Ist eine Folge beschränkt, so kann man nachweisen, dass sie einen Grenzwert hat. Der Grenzwert ist bei monoton steigenden Folgen die **kleinste obere Schranke** und bei monoton fallenden Folgen die **größte untere Schranke**.

Den Grenzwert einer Funktion schreibt man folgendermaßen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Zahlenfolgen, die einen Grenzwert haben, sind **konvergent**. Hat eine Folge keinen Grenzwert, so ist sie **divergent**.

Eine konvergente Folge ist beispielsweise die Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Geht n gegen Unendlich, so geht der Wert des Bruchs gegen Null. Man schreibt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$